

Aplikácia teórie náhodných funkcií pri charakterizovaní priestorového rozloženia hodnôt parametrov ložísk nerastných surovín

JÁN DRABANT

Katedra matematiky VŠT Košice, Švermova 9, 043 53 Košice

(10 obr. v texte a 4 tab.)

Doručené 13. 2. 1985

Использование теории случайных функций для характеристики пространственного расположения величин элементов месторождений полезных ископаемых

Работа направлена на использование теории случайных функций для характеристики пространственного расположения величин элементов месторождений полезных ископаемых. Приведены основные характеристики случайных функций, которые являются как математическая надёжность, дисперсия и корреляционная функция и объясняется понятие стационарности и эргодичности. Все эти характеристики случайных функций исследуются на месторождении железа. На основании развития, корреляционных функций утверждается, что расположение содержания железа по направлению и падению месторождения можно считать как стационарные случайные процессы без эргодического свойства.

Application of the theory of random functions in the characterization of the spatial distribution of some orebody descriptors

The paper deals with the application of the theory of random functions for the characterization of the analytical data of an iron orebody. The basic characteristics of the random functions (expectation, dispersion, correlation function) are described and the concept of stationarity and ergodicity explained. The analysis of the correlation functions showed that the distribution of Fe in the direction of the major axis and dip of the orebody can be considered to be stationary process lacking ergodicity.

Jednou z úloh geologického prieskumu ložísk nerastných surovín je objasnenie ich priestorového rozloženia parametrov. Problém priestorového využitia premennosti parametrov nadobúda zvlášť dôle-

žitú úlohu pri prieskume ložísk, v ktorých možno dosiahnuť maximálny efekt iba pri dobrom súlade geologicko-prieskumných prác s priestorovou zložitostou ložiska, včítane jeho kvalitatívnych parametrov.

Rozloženie parametra ložiska ako náhodný proces

Už dávnejšie je známe, že výsledky pozorovania parametrov v susedných priestorových bodoch ložiska odhaľujú zákonitosti v priestorovom rozložení parametrov, ale tiež poukazujú na náhodné rozdiely pozorovaných hodnôt. Napr. obsah chemického prvku (alebo iných parametrov) toho istého ložiska je na každom mieste iný, zobrazené profily kovnatosti nikdy nie sú totožné, hoci ich číselné charakteristiky (stredná hodnota, disperzia a iné) sa často líšia nepatrne. Takéto náhodné veličiny, ktoré sa menia v priebehu pokusu v závislosti od nenáhodného parametra, ktorým môže byť čas, dĺžka, priestorová súradnica a pod., sa nazývajú náhodnými funkciami a zaoberá sa nimi teória náhodných funkcií.

Teda funkciu, ktorej hodnota pri danom argumente je náhodnou veličinou, voláme náhodnou funkciou. Konkrétny tvar, ktorú náhodná funkcia nadobúda v priebehu pokusu sa nazýva realizáciou náhodnej funkcie. Náhodná funkcia sa zobrazuje náhodnou plochou, ktorej všetky súradnice sú náhodnými veličinami. To znamená, že náhodná funkcia sa nemôže zobraziť krivkou. Krivkou sa môže zobraziť iba jej konkrétna realizácia. Preto pod krivkou náhodnej funkcie rozumieme nie konkrétnu realizáciu, ale celý súbor možných realizácií náhodnej funkcie.

Matematický aparát náhodných funkcií umožňuje určiť niektoré obecné zákonitosti v správaní náhodných funkcií. Na rozdiel od číselných charakteristík náhodných veličín, ktoré reprezentujú určité čísla (stredná hodnota, disperzia atď.) v teórii náhodných funkcií sa zavádzajú analytické charakteristiky, ktoré však v obecnom prípade nie sú čísla, ale funkcie času, dĺžky alebo priestorovej súradnice.

Základnými charakteristikami náhodných funkcií sú:

1. matematická nádej — je to niektorá stredná, nie náhodná funkcia, okolo ktorej rôznym spôsobom oscilujú konkrétne realizácie náhodnej funkcie. Označuje sa

$$m(l) = m_X(l) = E[X(l)]$$

kde l je dĺžka.

Matematická nádej náhodnej funkcie pre danú hodnotu argumentu l je rovná matematickej nádeji príslušného rezu náhodnej funkcie a určí sa z množstva realizácií pre každý rez zvlášť, podľa známych vzťahov teórie náhodných veličín.

Pre zjednodušenie výpočtov charakteristík náhodných funkcií sa často používa tzv. centralizovaná náhodná funkcia

$$\hat{X}(l) = X(l) - m_X(l)$$

a hovorí sa o pulzácii funkcie $X(l)$.

2. Disperzia — je nenáhodná funkcia, ktorej hodnota pre daný argument l je rovná disperzii príslušného rezu náhodnej funkcie a označuje sa

$$D_X(l) = D[X(l)]$$

Disperzia náhodnej funkcie charakterizuje šírku poloosi rozptylu možných realizácií náhodnej funkcie vo vzťahu k jej matematickej nádeji.

3. Korelačná funkcia. Mierou väzby (závislosti) medzi susednými rezmí náhodnej funkcie, pri dvoch argumentoch l_1 a l_2 je korelačný moment

$$K_X(l_1, l_2) = E[\hat{X}(l_1) \cdot \hat{X}(l_2)] = E[(X(l_1) - E[X(l_1)]) \cdot (X(l_2) - E[X(l_2)])]$$

Korelačnou funkciou sa nazýva funkcia dvoch argumentov $K_X(l_1, l_2)$, ktorá pri danom páre hodnôt l_1 a l_2 sa rovná kore-

lačnému momentu príslušných rezov náhodnej funkcie. Ak $l_1 = l_2$, potom $K_x(l)$ sa rovná disperzii náhodnej funkcie v danom reze.

Korelačná funkcia je základným pojmom teórie náhodných funkcií a charakterizuje šírku poloosi kmitov náhodnej funkcie a jej dynamiku, t. j. možnú zmenu náhodnej funkcie od jednej hodnoty argumentu k druhej. Veličiny v bodoch jeden až tri sú nevyhnutné pre aplikáciu teórie náhodných funkcií v ktoromkoľvek technickom odbore a teda aj pri hodnotení výsledkov geologického prieskumu ložísk nerastných surovín.

V geologických aplikáciách sa korelačné funkcie skúmali G. Matheronom (1968), M. Davidom (1977) a inými predstaviteľmi tzv. francúzskej školy geoštatistiky. Základným pojmom geoštatistiky je variogram — funkcia, ktorá sa definuje vzťahom

$$\gamma_x(h) = \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} [f(x+h) - f(x)]^2 dx$$

V súvislosti s genetickým významom variogramu sa uvádza, že je to krivka, ktorá predstavuje stupeň spojitosti mineralizácie. Tvar tejto krivky závisí od charakteru premenlivosti zrudnenia, v súvislosti s tým sa popisujú štyri základné teoretické modely variogramov, ktoré prislúchajú ložiskám s rôznymi genetickými zvláštnosťami. Medzi variogramom a korelačnou funkciou pri $h \ll L$ existuje závislosť.

$$\gamma_x(h) = 2[K_x(0) - K_x(h)]$$

Na základe toho možno plne rozšíriť závery o genetickom význame variogramov aj na korelačné funkcie. Korelačná funkcia je teda mierou závislosti medzi susednými hodnotami parametra ložiska nerastnej suroviny v priestore ložiskového

telesu. Táto väzba sa mení v závislosti od rýchlosti chemických reakcií, od difúzných a filtračných zložiek pohybu hydrotermálnych roztokov, energetických pochodov a ďalších procesov, ktoré viedli k vzniku ložiska. Z uvedených dôvodov sa na ložiskách nerastných surovín prejavuje určitý trend, viac alebo menej výrazná anizotropia a na viaczložkových ložiskách aj rôzne nehomogenity, čo vedie k rôznym typom náhodných procesov. V príspevku skúmame možnosť aplikácie stacionárnych náhodných procesov na opis priestorového rozloženia hodnôt parametrov ložísk nerastných surovín.

Náhodné procesy, akými sú napr. zrudnenie, či obsah nejakej zložky, prebiehajú v čase, či v priestore približne rovnako a predstavujú náhodné oscilácie okolo niektorej strednej hodnoty, pričom zákonitosť týchto oscilácií a ich amplitúda sa s dĺžkou (súradnicou) nemenia. Takéto procesy sa nazývajú rovnorodými alebo stacionárnymi. Ak je argumentom náhodnej funkcie vzdialenosť (ako je to v geologickom prieskume pri odbere vzoriek), pričom smer pozorovania nehrá žiadnu úlohu, nazývame takúto postupnosť hodnôt izotropiou. V tomto prípade namiesto termínu stacionárnosti procesu sa používa tiež termín rovnorodosti a izotropnosti poľa, čo sa prejaví v rovnorodosti poľa disperzií.

Aby náhodný proces bol stacionárny, musí spĺňať tieto podmienky:

1. matematická nádej $E[X(t)] = \text{konšt}$
2. disperzia $D_X(t) = \text{konšt}$.

3. korelačná funkcia $K_x(l_1, l_2) = K_x(l_2 - l_1) = K_x(\Delta l)$ musí byť funkciou jediného argumentu, ktorým je dĺžka úseku medzi susednými rezmí $(\Delta l = l_2 - l_1)$ a nezávisí od polohy tohto intervalu na osi L.

Z uvedených podmienok je tretia podmienka jediná a postačujúca, ktorú musí spĺňať stacionárna náhodná funkcia. Pre

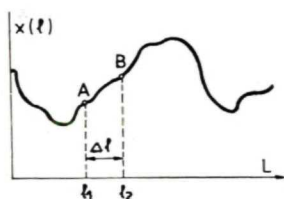
porovnanie dvoch alebo viacerých stacionárnych náhodných funkcií sa používa tzv. normovaná korelačná funkcia

$$\rho(\Delta l) = \frac{k_x(\Delta l)}{D_x}$$

kde $D_x = k_x(0)$ je konštantná disperzia.

Pre objasnenie významu korelačnej funkcie predstavme si určitý zobrazený profil $X(l)$ a na ňom dva body A a B, pričom vzdialenosť medzi bodmi je $\Delta l = l_2 - l_1$ (obr. 1). Normovaná korelačná funkcia vyjadruje tesnosť väzby (silu závislosti) medzi všetkými možnými bodmi na zobrazenom profile, ktoré sú od seba vzdialené o dĺžku Δl .

Hodnoty $\rho(\Delta l)$ sa pohybujú v medziach ± 1 . Ak $\rho(\Delta l) = \pm 1$, potom ktorýkoľvek bod A na profile jednoznačne určuje polohu bodu B, ktorý je vzdialený od A



Obr. 1. Grafické zobrazenie realizácie náhodného procesu

Fig. 1. Graph of random process realization

o Δl . Z toho vyplýva, že normovaná korelačná funkcia pre $\Delta l = 0$ je rovná jednej. Čím menšia bude hodnota $\rho(\Delta l)$ pri danom Δl , tým menšia bude závislosť medzi bodmi, ktoré sú vzdialené od seba o dĺžku Δl . Ak $\rho(\Delta l) = 0$, potom poloha bodu B nezávisí od polohy bodu A, keď vzdialenosť medzi bodmi je Δl .

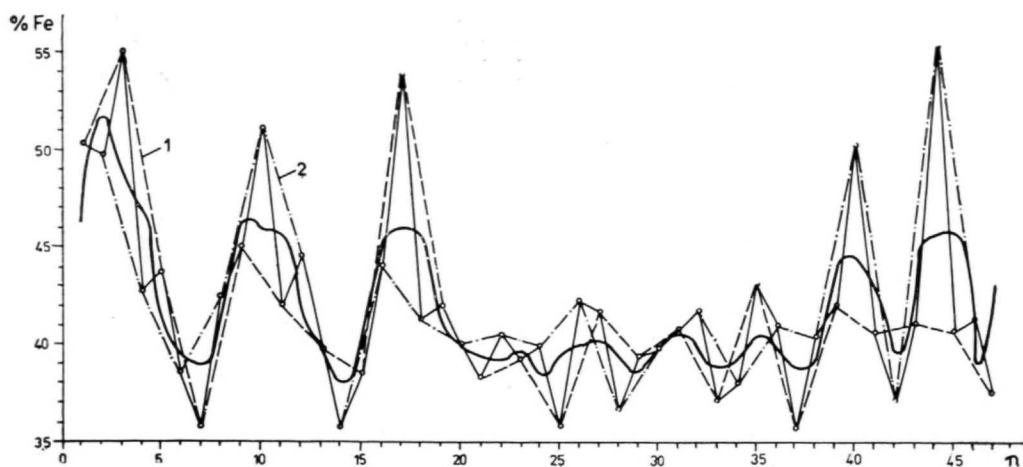
Uvedené základné pojmy teórie náhodných procesov môžeme aplikovať na výsledky geologického prieskumu ložísk nerastných surovín. Prakticky ľubovoľný

parameter ložiska sa v priebehu jeho skúmania nemení a je daný geochemickým poľom alebo funkciou, ktorej hodnota v ľubovoľnom bode a čase zostáva rovnaká. Takéto geochemické pole alebo funkcia rozloženia parametra ložiska sa vyznačuje základnými vlastnosťami stacionárnej náhodnej funkcie.

Nie je ťažké presvedčiť sa o tom, že rozloženie parametrov ložísk nerastných surovín možno skúmať ako náhodný proces (náhodnú funkciu).

Predstavme si, že máme niekoľko realizácií funkcie rozloženia parametra ložiska v určitom banskom diele, napr. profile, ktoré by sme získali zo všetkých šýroch stien banského diela tou istou metódou a tým istým spôsobom vzorkovania alebo napr. rádiometrickým vzorkovaním banského diela s automatickým zápisom, ktoré by sme vykonali niekoľkokrát. Krivky takýchto realizácií budú oscilovať okolo nejakej krivky, ako u náhodných funkcií oscilujú rôzne realizácie okolo strednej krivky.

Niektorí autori (Borovko, 1966; Četverikov, 1968; Rac, 1968) poukazujú na to, že tvar krivky zmeny parametra ložiska v banskom diele závisí od charakteru premenlivosti parametra, ale aj od metód vzorkovania, geometrie vzoriek, ich rozmiestnenia a orientácie, hustoty vzorkovania, polohy počiatočného bodu, dĺžky intervalu odberu vzoriek a pod. To znamená, že v závislosti od podmienok a metód vzorkovania môžeme získať pre jedno a to isté banské dielo rôzne profile a teda aj rôzne realizácie funkcie rozloženia skúmaného parametra. Na obr. 2 je profil obsahu Fe na 1. horizonte istého ložiska, o ktorom sa ešte zmienime. Číslami 1 a 2 sú označené možné realizácie funkcie rozloženia obsahu Fe v závislosti od polohy počiatočného bodu vzorkovania cez dva intervaly (teda aj dve realizácie) a ich príslušná stredná krivka m_x . Vidieť,

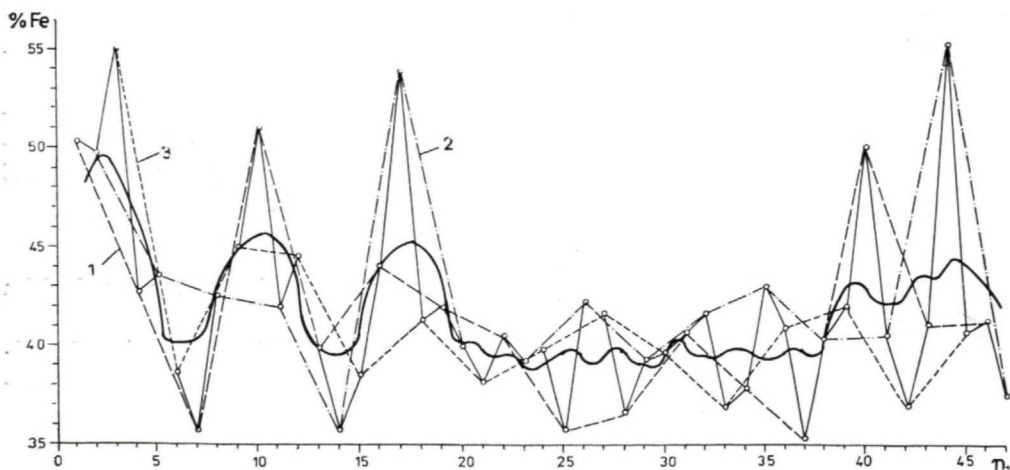


Obr. 2. Grafické zobrazenie obsahu Fe na 1. horizonte a dve možné realizácie cez dva intervaly vzorkovania. Vysvetlivky ako pri obr. 4

Fig. 2. Graph of the Fe content on the 1st horizon and two possibilities of realization through two intervals of sampling. Explanation see Fig. 4

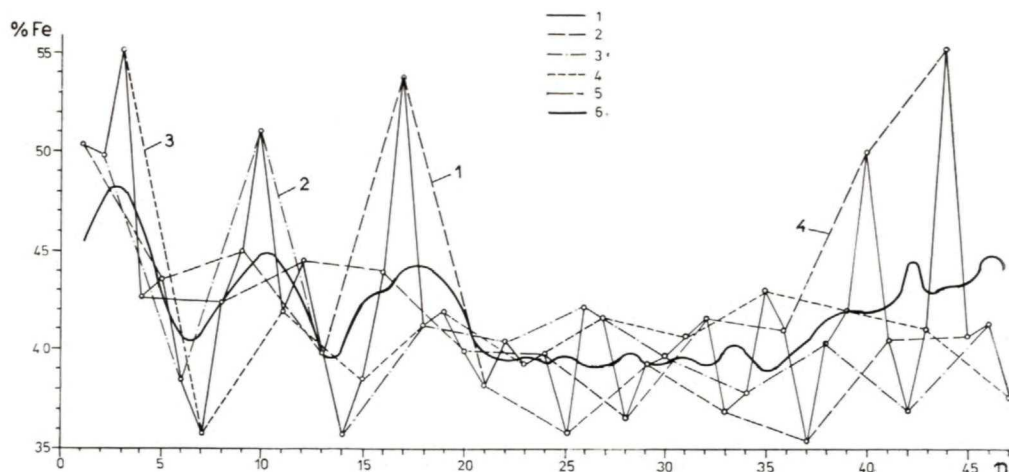
že krivky nie sú veľmi odlišné a vykazujú pomerne malý rozptyl okolo krivky m_x . Na obr. 3 je ten istý profil. Číslami 1, 2 a 3 sú označené možné realizácie rozlo-

ženia obsahu Fe cez tri intervaly s rôznym počiatkom vzorkovania (celkom tri realizácie), ako aj m_x týchto realizácií. Na obr. 4 je opäť rovnaký profil a číslami 1,



Obr. 3. Grafické zobrazenie obsahu Fe na 1. horizonte a tri možné realizácie cez tri intervaly vzorkovania. Vysvetlivky ako pri obr. 4

Fig. 3. Graph of the Fe content on the 1st horizon and three possible realization through two intervals of sampling. Explanation see Fig. 4



Obr. 4. Grafické zobrazenie obsahu Fe na 1. horizonte a štyri možné realizácie cez štyri intervaly vzorkovania. 1 — rozloženie Fe v pôvodných vzorkách; 2 — $x_1(l)$; 3 — $x_2(l)$; 4 — $x_3(l)$; 5 — $x_4(l)$; 6 — m_x

Fig. 4. Graph of the Fe content on the 1st horizon and four possible realizations through four intervals of sampling. 1 — Fe distribution in original samples; 2 — $x_1(l)$; 3 — $x_2(l)$; 4 — $x_3(l)$; 5 — $x_4(l)$; 6 — m_x

2, 3 a 4 sú označené možné realizácie rozloženia Fe v 4 intervaloch s rôznym počiatkom vzorkovania a im prislúchajúca m_x .

Z obr. 2—4 vidieť, že pri tých istých podmienkach vzorkovania sa možné realizácie rozloženia parametra v banskom diele značne líšia, ale rozdielne sú aj matematické nádeje týchto realizácií. Zväčšovaním intervalu vzorkovania, t. j. zvyšovaním počtu možných realizácií rozloženia, sa stredná krivka stáva plynulejšou a predstavuje tú krivku, ku ktorej sa musí bližť skutočná krivka rozloženia parametra a ktorú získame vyrovnaním reprezentatívnej realizácie pomocou štatistického kľazového okna. Skutočná krivka rozloženia parametra sa charakterizuje nie jednou realizáciou, ale súborom možných realizácií, tak ako je svojimi realizáciami reprezentovaná náhodná funkcia.

Pretože tvar možných realizácií závisí od podmienok vzorkovania, od nich bude závisieť aj tvar skutočnej funkcie rozloženia parametra ložiska. Z toho vyplýva,

že jeho skutočná funkcia je relatívny pojem, ktorý ovplyvňujú podmienky vzorkovania. Pod skutočnou funkciou (krivkou alebo plochou) rozloženia parametra, podľa analógie s definíciou náhodnej funkcie, treba chápať nie konkrétnu realizáciu, ale celý súbor možných realizácií parametra pri určitých podmienkach vzorkovania, t. j. krivky m_x .

Z uvedených ukážok možno jednoznačne prehlásiť, že rozloženie parametra ložiska nerastnej suroviny možno skúmať ako náhodný proces.

Ergodickosť rozloženia parametra ložiska

Ako sme už uviedli, ak sú splnené podmienky v bodoch 1—3, je uvažovaný proces stacionárny. Pre takéto procesy

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L a(\Delta l) d\Delta l = 0$$

platí ergodická veta, podľa ktorej strednú

hodnotu a korelačnú funkciu je možné odhadnúť z jedinej realizácie na dostatočne veľkom úseku L . To znamená, že pre stanovenie strednej hodnoty kovnatosť a pre určenie korelačnej funkcie stačí mať jediný, dostatočne dlhý profil. Inými slovami, pre zvolený profil bude poloha strednej čiary a príslušná korelačná funkcia rovnaká pre všetky možné zobrazované profile toho istého ložiska. Jedinou podmienkou je, aby sa kovnatosť sledovala na dostatočne dlhom úseku L . Platí tu teda

$$E[X(l)] \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L X(l) dl = m_x \quad (1)$$

$$\rho(\Delta l) \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\int_0^L [X(l) - m_x][X(l + \Delta l) - m_x] dl}{\int_0^L [X(l) - m_x]^2 dl} \quad (2)$$

Ak pri $\Delta l \rightarrow \infty$ funkcia $\rho(\Delta l)$ nekonverguje k nule, ale k nejakej konštantnej hodnote, potom je síce náhodná funkcia stacionárna, ale nie ergodická.

V praxi sa integrály v rovniciach (1) a (2) zamieňajú konečnými súčtami

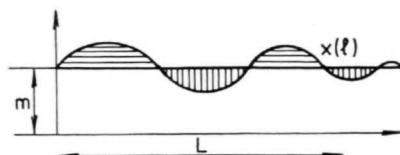
$$m_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(l_i) \quad (3)$$

$$\rho(\Delta l) = \frac{\frac{1}{n-\Delta l} \sum_{i=1}^{n-\Delta l} [x(l_i) - m_x][x(l_i + \Delta l) - m_x]}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x(l_i) - m_x]^2} \quad (4)$$

kde m_x je poradnica strednej čiary, t. j. stredná hodnota, ktorá sa vypočíta zo všetkých n -pozorovaných hodnôt.

Výpočet korelačnej funkcie sa vykonáva pre $\Delta l = 0, 1, \dots$ po také hodnoty Δl , pri ktorých je korelačná funkcia rovná nule alebo začína nepravidelne oscilovať okolo nuly.

Stredná čiara pre daný zobrazený profil sa definuje tak, že: 1. na celej dĺžke zobrazeného profilu je rovnobežná s osou L ; 2. rozdeľuje zobrazený profil tak, že súčet štvorcov odchýlok tohto profilu od strednej čiary je minimálny (obr. 5).



Obr. 5. Realizácia stacionárneho náhodného procesu s vyznačením strednej čiary m_x
Fig. 5. Realization of stationary random process with marking of the central m_x line

Na základe týchto podmienok pre poradnicu strednej čiary platí

$$m_x = \frac{1}{L} \int_0^L x(l) dl \quad (5)$$

a pri splnení druhej podmienky

$$\int_0^L [x(l) - m_x]^2 dl = \min$$

Ak má byť táto podmienka splnená, potom

$$\frac{d}{dm_x} \int_0^L [x(l) - m_x]^2 dl = 0$$

Ak vykonáme naznačený úkon, dostaneme

$$\int_0^L [x(l) - m_x] dl = 0$$

a

$$m_x = \frac{1}{L} \int_0^L x(l) dl$$

čím sme potvrdili, že poradnica m_x definovaná rovnicou (3) vyhovuje prvej aj druhej podmienke a jej odhad je rovný strednej hodnote zo všetkých hodnôt príslušného profilu.

Výskum základných charakteristík funkcie rozloženia Fe v ložisku

Úlohou výskumu bolo preveriť, či súhrn možných zobrazených profilov obsahu Fe predstavuje stacionárny náhodný proces a či pre neho platí ergodická veta. Výskum sa vykonával na ložisku, ktoré tvorí v podstate mohutný žilník, skladajúci sa z radu paralelných žíl a žiliiek, ktoré sú pri povrchu vzdialené od seba 200 i viac metrov. Žily nie sú súvisle vy-

vinuté na celej tektonickej línii, ale tvoria zrudnené úseky (šošovky, rudné stĺpy) s rozličnou dĺžkou a hĺbkou.

Rudná výplň sa skladá predovšetkým z hlavného minerálu, hrubokryštalického sideritu, v ktorom sú nerovnomerne rozmiestnené sulfidy, a to najmä chalkopyrit, pyrit, tetraedrit, arzenopyrit, pyrotín a minerály sulfosoli Bi. Kvalita rudnej výplne sa so vzrástajúcou hĺbkou mení, a to v prospech Cu. Ložisko sa podrobne preskúmalo systémom horizontálnych bankových diel, ktorými sa sledovala smerová dĺžka žíl, ako aj maximálny dosah zrudnenia v hĺbke. Jednotlivé horizonty boli vo vzdialenosti 50 m poprepávané komínmi.

Vzorkovanie sa v bankových dielach vykonávalo zásekovým spôsobom kolmo na

Výpočet korelačnej funkcie rozloženia obsahu Fe na 1. horizonte
Calculation of correlation function of iron content distribution on the 1st level

Tab. 1

p. č.	Fe x_i	$\delta_i =$ $= x_i - \bar{x}$	δ_i^2	$\delta_i \cdot \delta_{i+1}$	$\delta_i \cdot \delta_{i+2}$	$\delta_i \cdot \delta_{i+3}$	$\delta_i \cdot \delta_{i+4}$	$\delta_i \cdot \delta_{i+5}$
1.	43,70	2,44	5,953					
2.	38,65	-2,61	6,812	-6,368				
3.	35,85	-5,41	29,268	14,120	-13,200			
4.	42,50	1,24	1,537	-6,708	-3,236	3,026		
5.	45,02	3,76	14,137	4,622	-20,341	-9,814	9,174	
6.	51,17	9,91	98,208	37,261	12,288	-53,613	-25,865	24,180
.								
.								
.								
42.	41,35	0,09	0,008	-0,047	1,266	-0,012	-0,387	-0,062
43.	37,52	-3,74	13,987	-0,330	1,982	-52,622	0,486	16,082
$\bar{x} = 41,26$		$\Sigma 0,0$	831,117	130,363	-152,6	-213,25	64,935	90,034
		$\Delta 1$	0	1	2	3	4	5
$k(\Delta 1) = \Sigma/n - \Delta 1$			19,328	3,104	-3,723	-5,331	1,665	2,369
$\rho(\Delta 1) = k(\Delta 1)/\sigma^2$			1,000	0,161	-0,193	-0,276	0,086	0,126

smer rudného ťahu (šírka záseku 10 až 15 cm, hĺbka 5—10 cm). Pri väčších mocnostiach ako 1,5 m sa vzorkovanie vykonávalo segmentovaním na úseky do 1 m. Frekvencia vzorkovania na 4 m sa stanovila s ohľadom na premenlivosť zložky Cu.

Autokorelačné funkcie rozloženia obsahu Fe sa vypočítali na 4 horizontoch. Vybrali sa z nich tie časti, na ktorých sa vzorkovanie vykonalo s rovnakou frekvenciou. Spravidla ide o úseky, ktoré sa nachádzajú v centrálnej časti žily. Výpočet autokorelačných funkcií sa vykonával podľa schémy v tab. 1, v ktorej je uvedený výpočet korelačnej funkcie rozloženia Fe na 1. horizonte. Hodnoty autokorelačných funkcií na jednotlivých horizontoch sú v tab. 2 a ich grafy na obr. 6a, b, c, d. V tab. 2 sú tiež hodnoty sumárnej korelačnej funkcie v smere ložiska, ktoré sa vypočítali podľa vzťahu

$$\rho(\Delta l) = \left[\frac{1}{N-d} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^{n-m} \delta_i \cdot \delta_{i+m} \right] \frac{1}{\sigma^2} \quad (6)$$

kde $j = 1, \dots$; d — je počet banských diel; $m = 0, 1, \dots$ — je vzdialenosť medzi vzorkami v jednotkách intervalu vzorkovania Δl ; $i = 1, 2, \dots$; $n-m$ — je počet vzoriek v banskom diele; N — počet vzoriek celkom.

Korelogram korelačnej funkcie rozloženia Fe v smere ložiska je na obr. 7.

Po úklone ložiska sa vybrala jedna realizácia, z ktorej sa vypočítala korelačná funkcia. Jej hodnoty sú uvedené v tab. 2 a korelogram je na obr. 7.

Napriek nie hladkému priebehu empirických korelačných funkcií (obr. 6 a 7), ktorý je možné vysvetliť nedostatočným počtom pozorovaní, je vidieť, že vo všetkých prípadoch ide o jeden a ten istý typ korelačnej funkcie, ktorý môžeme vyjadriť rovnicou

$$\rho^*(\Delta l) = e^{-\lambda(\Delta l)} \quad (7)$$

Tab. 2

Hodnoty korelačnej funkcie $\rho(\Delta l)$ rozloženia Fe
Values of correlation function $\rho(\Delta l)$ of iron distribution

Ban. dielo	n	$\bar{x}$	σ^2	Hodnoty korelačnej funkcie pre $\Delta l = 1, 2, \dots$									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1. hor.	43	41,26	19,33	0,161	-0,193	-0,276	0,086	0,126	-0,002	0,049	0,117	0,159	-0,162
2. hor.	43	35,20	18,02	0,202	0,061	0,092	-0,098	-0,128	-0,074	-0,086	-0,121	-0,170	0,091
3. hor.	23	33,80	14,17	-0,007	-0,189	0,038	-0,061	-0,073	-0,173	0,111	0,348	-0,497	
4. hor.	22	38,30	14,49	0,160	0,254	0,124	-0,223	-0,110	0,008	-0,127	-0,086	-0,026	-0,161
Sumár korel. funkcie rozloženia Fe v smere ložiska				0,128	-0,017	-0,005	-0,074	-0,046	-0,060	-0,013	0,064	-0,012	-0,077
Hodnoty korelačnej funkcie rozloženia Fe po úklone ložiska													
	43	40,66	21,1	0,436	0,089	0,165	0,105	-0,026	-0,065	-0,03	0,034	-0,052	0,066

v tom prípade, ak empirická korelačná funkcia konverguje pri $\Delta l \rightarrow \infty$ k nule, alebo

$$Q^*(\Delta l) = e^{-\alpha(\Delta l)} \pm c \quad (8)$$

ak empirická korelačná funkcia konverguje k nejakej, nie nulovej konštante.

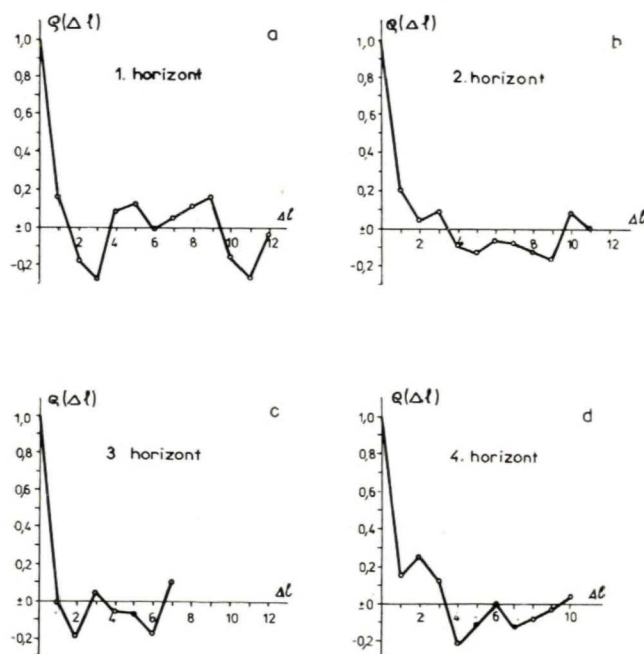
Z korelogramov (obr. 7), ktoré sú reprezentatívnymi korelačnými funkciami rozloženia obsahu Fe v smere a úklone ložiska, nemožno jednoznačne hovoriť o konvergencii korelačných funkcií k nule a teda o stacionárnosti procesu s ergodicou vlastnosťou. Správnu odpoveď možno získať výpočtom parametrov α a c rovníc (7) a (8) metódou najmenších štvorcov.

Úloha určenia parametrov α rovnice (7) sa rieši nasledovne: zvolíme niekoľko hodnôt α a pre každú z nich vypočítame súčet štvorcov odchýlok empirických hodnôt korelačnej funkcie $\rho(\Delta l)$ od teoretických hodnôt korelačnej funkcie $\rho^+(\Delta l)$, ktorý označíme $\Sigma(\alpha)$. Z hodnôt $\Sigma(\alpha)$ zo-

strojíme graf v pravouhlom systéme súradníc, pričom na os x vynášame hodnoty α a na os y hodnoty $\Sigma(\alpha)$. Hodnota α , pre ktorú krivka $\Sigma(\alpha)$ dosahuje minimum, je najpravdepodobnejšou hodnotou hľadaného parametra α .

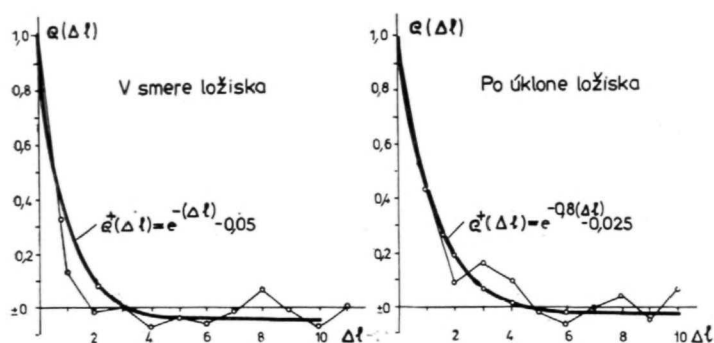
Určenie parametra α a c rovnice (8) sa rieši analogicky. Zvolíme niekoľko dvojíc α , c , pre ktoré vypočítame súčet štvorcov odchýlok empirických hodnôt korelačnej funkcie $\rho(\Delta l)$ od teoretických hodnôt $\rho^+(\Delta l)$, ktorý označíme $\Sigma(\alpha)$. Výsledkom výpočtu je graf súčtu štvorcov odchýlok, z ktorého odčítame najpravdepodobnejšiu dvojicu hľadaných parametrov α a c , v zmysle požiadavky metódy najmenších štvorcov.

Vzhľadom na značný objem výpočtových prác, uvádzame výpočet parametrov korelačnej funkcie rozloženia obsahu Fe po úklone ložiska. Výpočet je v tab. 3, a to pri $c = 0$ a $\alpha = 0,6; 0,7; 0,8; 0,9$ a $1,0$. Výsledkom je graf (obr. 8), z ktorého vyplýva, že najpravdepodobnejšími



Obr. 6. Empirické korelačné funkcie rozloženia obsahu Fe na štyroch horizontoch

Fig. 6. Empirical correlation functions of the Fe content distribution on four horizons



Obr. 7. Sumárne empirické korelačné funkcie v smere a po úklone ložiska s vyznačením teoretických korelačných funkcií $\rho^+(\Delta t)$

Fig. 7. Summary empirical correlation functions in the direction and dip of the deposit ore body with marking of theoretical $\rho^+(\Delta t)$ correlation functions

hodnotami hľadaných parametrov sú $c = -0.025$ a $\alpha = 0.8$.

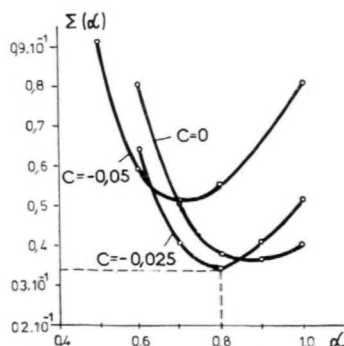
Tým istým spôsobom sa vypočítali aj parametre pre korelačnú funkciu rozloženia obsahu Fe v smere ložiska s výsledkami $c = -0.05$ a $\alpha = 1.0$. Teoretické hodnoty korelačných funkcií je možné napísať rovnicami

$$Q^*(\Delta t) = e^{-\Delta t} - 0.05 \quad \text{v smere ložiska}$$

a

$$Q^*(\Delta t) = e^{-0.8\Delta t} - 0.025 \quad \text{po úklone ložiska}$$

Ich grafy sú na obr. 7. Tieto rovnice umožňujú vysloviť veľmi dôležitý záver:



Obr. 8. Grafické zobrazenie súčtov $\Sigma(\alpha)$ pre určenie parametrov α a c korelačnej funkcie rozloženia obsahu Fe po úklone ložiska podľa tab. 3

Fig. 8. Graph of $\Sigma(\alpha)$ sums for the determination of α and c parameters and correlation in the dip of the deposit ore body after Tab. 3

rozloženie obsahu Fe v oboch základných smeroch ložiska možno považovať za stacionárny náhodný proces, ale tento sa nevyznačuje ergodickou vlastnosťou, pretože korelačné funkcie nekorelujú k nule, ale k vypočítaným hodnotám c . Príčina neergodickosti náhodného procesu rozloženia obsahu Fe môže byť spôsobená tým, že v jeho rozložení sa vyskytuje ďalšia zložka, reprezentovaná obyčajnou náhodnou veličinou s matematickou nádejou a disperziou, ktoré spôsobujú to, že každá realizácia rozloženia obsahu Fe svojim charakterom bude sa odlišovať od ostatných a bude sa vyznačovať inou strednou hodnotou v závislosti od toho, akú hodnotu prijala náhodná veličina. Inak povedané, rozloženie obsahu Fe nemožno v tomto prípade považovať za tzv. normálny — gaussovský, stacionárny proces, lebo je vnútorne nerovnorodý a táto nerovnorodosť sa vo väčšej miere prejavuje v smere ložiska, ako po úklone. Miernejší úbytok korelačnej funkcie rozloženia Fe po úklone ložiska poukazuje tiež na to, že tesnosť väzby medzi susednými hodnotami obsahov Fe je väčšia, ako v smere ložiska.

Záver

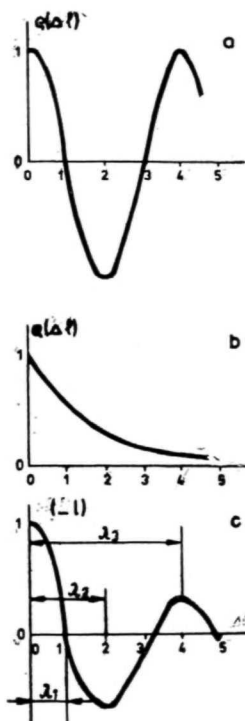
Podľa výsledkov výskumu základných charakteristik rozloženia obsahu Fe, ale aj prác zahraničných autorov (Bukrinskij,

Výpočet parametrov korelačnej funkcie a súčtu štvorcov $\Sigma(\alpha)$ pri $c=0$
 Calculation of parameters of correlation function and of sum of squares $\Sigma(\alpha)$ at $C=0$

Tab. 3

Δl	emp. hodnoty $\rho(\Delta l)$	$\alpha = 0,6$ $e^{-\alpha \Delta l }$	$ \Delta $ (2) — (3)	Δ^2 (4) ²	$\alpha = 0,7$ $e^{-\alpha \Delta l }$	$ \Delta $ (2) — (6)	Δ^2 (7) ²	$\alpha = 0,8$ $e^{-\alpha \Delta l }$	$ \Delta $ (2) — (9)	Δ^2 (10) ²
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	0,436	0,549	0,113	0,012769	0,497	0,061	0,003721	0,449	0,013	0,000169
2	0,089	0,301	0,212	0,044944	0,247	0,158	0,024964	0,202	0,113	0,012769
3	0,165	0,165	0,0	0,0	0,122	0,043	0,001849	0,091	0,074	0,005686
4	0,105	0,091	0,014	0,000196	0,061	0,044	0,001936	0,041	0,064	0,004096
5	—0,026	0,050	0,076	0,005776	0,030	0,056	0,003136	0,018	0,044	0,001936
6	—0,065	0,027	0,092	0,008464	0,015	0,080	0,006400	0,008	0,073	0,005329
7	—0,003	0,015	0,018	0,000324	0,007	0,010	0,000100	0,004	0,007	0,000049
8	0,034	0,008	0,026	0,000676	0,004	0,030	0,000900	0,002	0,032	0,001024
9	—0,052	0,004	0,056	0,003136	0,002	0,054	0,002916	0,001	0,053	0,002809
10	0,066	0,002	0,064	0,004096	0,001	0,065	0,004225	0,003	0,063	0,003969
$\Sigma(\alpha)$				0,080381	$\Sigma(\alpha)$		0,050147	$\Sigma(\alpha)$		0,037836
		$\alpha = 0,9$ $e^{-\alpha \Delta l }$	$ \Delta $ (2) — (12)	Δ^2 (13) ²	$\alpha = 1,0$ $e^{-\alpha \Delta l }$	$ \Delta $ (2) — (15)	Δ^2 (16) ²			
		(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)			
		0,407	0,029	0,000841	0,379	0,057	0,003249			
		0,165	0,076	0,005776	0,135	0,048	0,002116			
		0,067	0,098	0,009604	0,050	0,115	0,013225			
		0,027	0,078	0,006084	0,018	0,087	0,007669			
		0,011	0,037	0,001369	0,007	0,033	0,001089			
		0,005	0,070	0,004900	0,002	0,067	0,004489			
		0,002	0,005	0,000025	0,001	0,004	0,000016			
		0,001	0,033	0,001089	0,000	0,034	0,001156			
		0,000	0,052	0,002704	0,000	0,052	0,002704			
		0,000	0,066	0,004356	0,000	0,066	0,004356			
$\Sigma(\alpha)$				0,036748	$\Sigma(\alpha)$		0,040069			

1966; Borovko, 1971; Rac, 1968) môžeme pri štádiu rozloženia parametrov ložísk nerastných surovín pozorovať niekoľko typických korelogramov (obr. 9):



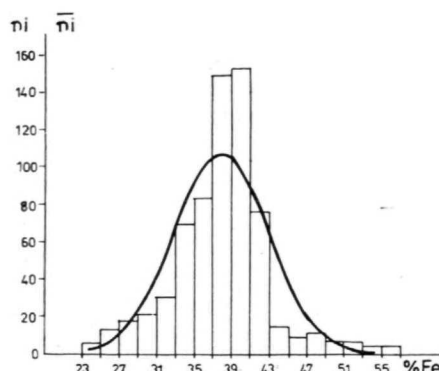
Obr. 9. Korelogramy niektorých typických korelačných funkcií

Fig. 9. Correlation graphs of some typical correlation functions

1. Ak sa náhodná funkcia $X(l)$ mení presne periodicky a má konštantnú amplitúdu a dĺžku vlny λ , korelogram bude sinusoida (obr. 9a). Tento prípad je pri hodnotení parametrov ložísk nerastných surovín veľmi zriedkavý.

2. Ak náhodná funkcia vykazuje iba náhodné oscilácie, potom korelogram má tvar zobrazený na obr. 9b, a príslušná korelačná funkcia môže byť aproximovaná funkciou (7). Úbytok korelačnej

funkcie je podmienený charakterom (vnútornou štruktúrou) náhodnej funkcie. Ak sa náhodná funkcia mení veľmi rýchlo, prejaví sa to aj v rýchлом úbytku korelačnej funkcie a naopak. Plynulá zmena náhodného procesu spôsobuje mierny úbytok korelačnej funkcie. Tento prípad odpovedá normálnemu, gaussovskému, náhodnému procesu, ktorý sa tiež vyznačuje ergodickou vlastnosťou, t. j. takému procesu, ktorého každý rez možno považovať za náhodnú veličinu rozdelenú normálne. Uvedený korelogram bude charakteristický pre parametre tých ložísk, na ktorých sa pri štatistickom spracovaní výsledkov vzorkovania potvrdí normálne rozdelenie skúmaných parametrov.



Obr. 10. Histogram a teoretická frekvenčná krivka normálneho rozdelenia obsahu Fe

Fig. 10. Histogram and theoretical frequency curve for normal distribution of Fe content

Podkladovým materiálom pre štúdium zákona o rozdelení obsahu Fe na uvedenom ložisku bolo 670 výsledkov analýz zásekových vzoriek, ktoré tu odobrali v priebehu geologického prieskumu. Triedením výsledkov analýz do čiastkových intervalov s veľkosťou 2 % Fe sa získal variačný rad rozdelenia obsahu Fe (tab. 4, obr. 10). Vzhľadom na to, že histogram vykazuje dosť významnú sy-

Tabuľka rozdelenia obsahu Fe,
výpočet číselných charakteristík
a teoretických početností

Table of iron content distribution, calculation
of numerical characteristics and of theoretical
frequencies

Tab. 4

P. č.	x_i	n_i	t	$f+(t)$	n'_i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1.	24	6	-2,773	0,0213	2,26
2.	26	13	-2,375	0,0596	6,33
3.	28	17	-1,977	0,1417	15,06
4.	30	21	-1,579	0,2870	30,50
5.	32	30	-1,182	0,4973	52,85
6.	34	69	-0,785	0,7348	78,10
7.	36	83	-0,387	0,9278	98,61
8.	38	149	0,0107	0,9999	106,27
9.	40	153	0,408	0,9186	97,63
10.	42	75	0,806	0,7232	76,86
11.	44	14	1,204	0,4850	51,55
12.	46	9	1,601	0,2776	29,50
13.	48	11	1,998	0,1355	14,14
14.	50	6	2,396	0,0567	6,02
15.	52	6	2,794	0,0200	2,12
16.	54	4	3,191	0,0062	0,65
17.	56	4	3,589	0,0016	0,17
Σ		670			668,65

$m_1 = -0,026866$; $m_2 = 6,328358$; $m_3 = 2,41791$;
 $m_4 = 190,071642$
 $\mu_2 = 6,3276$; $\mu_3 = 2,927926$; $\mu_4 = 190,358893$;
 $A = 0,184$; $\varepsilon = 1,754$
 $\bar{x} = 37,946$ Fe; $\sigma' = 5,02$; $v = 13,2$ ‰;
 $\sigma_A = 0,094$; $\sigma_\varepsilon = 0,189$

$$\frac{A}{\sigma_A} = 9,28 > 3 \quad \frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} = 1,95 < 3;$$

$$n'_i = \frac{670}{2,515 \cdot 2,506} \cdot f+(t) = 106,28 \cdot f+(t)$$

metriu, za aproximačný model empirického rozdelenia sa zvolilo normálne rozdelenie. Výpočet číselných charakteristík, teoretické početnosti n'_i normálneho rozdelenia, ako aj výpočet testovacích kritérií normality sú v tab. 4. Počiatočné momenty sme vypočítali podľa všeobecného vzorca

$$\text{pričom } m_h = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^h n_i}{n} \quad (9)$$

$$x'_i = \frac{x_i - x_0}{c}$$

kde x_0 je počiatočná hodnota, c je šírka (veľkosť čiastkového intervalu, n — počet všetkých pozorovaní, n_i — početnosti v čiastkových intervaloch, k — počet čiastkových intervalov.

Voľbou $h = 1, 2, 3, 4$ dostaneme príslušné počiatočné momenty $m_1 - m_4$, z ktorých sa vypočítajú centrálné momenty $\mu_2 - \mu_4$ podľa vzťahov známych z učebníc matematickej štatistiky.

Výpočet teoretických početností n'_i je v stĺpci 6 podľa vzťahu

$$n_i = n_0 \cdot f^+(t) \quad (10)$$

pričom

$$n_0 = \frac{n}{\sqrt{\mu_2} \sqrt{2\pi}}$$

$$f^+(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]$$

$$t = \frac{x'_i - m_1}{\mu_2^{0,5}}$$

Konečné testovanie normality sa vykonalo previerkou dvoch nerovností:

$$\left| \frac{A}{\sigma_A} \right| < 3 \quad \text{a} \quad \left| \frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \right| < 3 \quad (11)$$

kde A je asymetria, ε je miera strmosti (exces) a σ_A , resp. σ_ε sú ich stredné kvadratické odchýlky. Výpočet týchto číselných charakteristík sa vykonal podľa týchto vzťahov:

$$A = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \quad \sigma_A \approx \sqrt{\frac{6}{n}} \quad (12)$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \quad \sigma_\varepsilon \approx \sqrt{\frac{24}{n}}$$

Všetky uvedené číselné charakteristiky sú v tab. 4. Vzhľadom na to, že z nerovností (12) sa splnila iba jedna, sme oprávnení prehlásiť, že normálne rozdelenie nie je

vhodným modelom empirického rozdelenia. Môžeme ho sice považovať za symetrické, ale jeho strmosť je väčšia ako strmosť teoretického normálneho rozdelenia. Práve to je príčinou, že korelačné funkcie s rastúcim Δl nekonvergujú k nule, ale k istým konštantám c . Akákoľvek odchýlka od normality sa prejaví tým, že korelačná funkcia nebude konvergovať k nule, ale k nejakej nenulovej konštante a proces rozloženia skúmaného parametra sa nebude vyznačovať ergodicitou vlastnosťou. Tento prípad, ako ukazujú aj dosiahnuté výsledky, je na ložiskách nerastných surovín veľmi častý.

3. Ak náhodný proces $X(l)$ bude vykazovať náhodné i periodické oscilácie, t. j., ak v štruktúre náhodnej funkcie sa vyskytne nejaký prvok periodicity, bude mať korelogram tvar (obr. 9c), ktorý je možné aproximovať približne funkciou:

$$\alpha^*(\Delta l) = e^{-\lambda(\Delta l)} \cos \omega \Delta l \quad (13)$$

Určenie prevládajúcej vlnovej dĺžky λ v smere $X(l)$ možno vykonať niektorým z približných vzťahov

$$\lambda \approx 4 \lambda_1 \text{ alebo } \lambda \approx 2 \lambda_2 \text{ alebo } \lambda \approx \lambda_3,$$

kde λ_1 je úsečka prvého priesečníka korelogramu s osou úsečiek, λ_2 je úsečka prvého záporného minima, λ_3 je úsečka nasledujúceho kladného minima korelačnej funkcie.

Tento prípad sa pri hodnotení parametrov ložísk nerastných surovín vyskytuje veľmi často a odpovedá tiež normálnemu stacionárnemu procesu s ergodicitou vlastnosťou.

Využitie náhodných funkcií pri interpretácii rozloženia parametrov ložísk nerastných surovín a z nej vyplývajúcich charakteristík je v počiatočnom štádiu riešenia. Objasniť však treba do akej mie-

ry sú pozorované hodnoty parametra výsledkom náhodných a zákonitých variácií a kde sa nachádza hranica medzi týmito zložkami. Neobyčajná zložitosť prírodných podmienok ložísk nerastných surovín značne komplikuje matematický aparát a sťažuje matematickú interpretáciu rozloženia parametrov ložísk v priestore. Napriek týmto ťažkostiam umožňuje teória náhodných funkcií riešiť niektoré veľmi vážne úlohy geologického prieskumu. Ide o úlohu prekročenia úrovne alebo určenie pravdepodobnosti výskytu extrémnych hodnôt parametra ložiska, stanovenie minimálnej realizácie L , nutnej pre určenie strednej hodnoty parametra ložiska s vopred požadovanou presnosťou a optimalizáciu hustoty vzorkovania s ohľadom na charakter náhodného procesu.

Je nesporné, že teória náhodných funkcií už dnes umožňuje získať cenné informácie o rozložení parametrov ložísk nerastných surovín v priestore, a tým efektívnejšie využiť získaný materiál geologického prieskumu.

Recenzoval C. Schejbal

LITERATÚRA

- Bendat, J. S. — Piersol, A. G., 1966: Measurement and analysis of random data. J. Wiley, New York, *Ruský preklad* — 1971: *Izmerenie i analiz slučajnych procesov*. Moskva, Mir.
- Borovko, N. N. 1971: Statističeskij analiz prostranstvennyh geologičeskich zakonmernostej. Leningrad, Nedra.
- Bukrinskij, V. A. 1966: Prilozhenie teorii slučajnych funkcij dlia charakteristiky pokazatelej zaleži. *Izvestija VUZ, Geologija i razvedka*, 7.
- Čertvernikov, L. I. 1968: Teoretičeskije osnovy modelirovanija tel poleznych iskopaemyh. Voronež, VUG.
- David, M. 1977: Geostatistical ore reserve estimation. New York.
- Matheron, G. 1968: Traité de geostatistique, Paris. *Ruský preklad* — 1968: *Osnovy prikladnoj geostatistiki*, Moskva, Mir.
- Rac, M. V. 1968: Neodnorodnost gornych

porod i ich fyzických svojstv. Moskva, Nauka.
 Schejbal, C. 1983: Strukturální analýza prostorových proměnných veličin jako zá-

klad modelování geologických těles. *Geologie a hydrometalurgie uranu*, 7.
 Ventcel, E. S. 1962: Teorija verojatnostej, Moskva, Fizmatgiz.

Application of the theory of random functions in the characterization of the spatial distribution of some orebody descriptors

JÁN DRABANT

In the introductory part the author shows that the variation of the mineralization or the content of the desirable (ore) and undesirable (waste) components of the deposit can be considered to be a random process, the basic characteristics of which are the expectation m_x , dispersion D_x and the correlation or normalized correlation function. Further, the concept of stationarity and ergodicity is explained. It is shown that the mean value and the correlation function can be assessed on the basis of one set of data, provided the specimens are collected on a sufficiently long wall.

The basic properties of the random function were tested on data from an iron ore deposit. The correlation functions for the spatial distribution of Fe content were calculated on 4 horizons. This yielded the representative correlation function in the direction of the major axis of the orebody (Tab. 2, Fig. 7). From another set of measurements the correlation function along the dip of the orebody was calculated (Tab. 2, Fig. 7). As the correlation functions do not converge to zero, but to a constant c , the correlation function is interpreted by equation (8). Parameters α and c are determined by graphical analysis using the least square method (Tab. 3, Fig. 8). From the character of the correlation functions it is deduced that the distribution of Fe in both the basic extensions of the orebody could be considered

to be a stationary random process, which, however, is not ergodic. The distribution of the Fe content cannot be considered to be a Gaussian stationary process, because it is internally heterogeneous. This heterogeneity is more prominent in the direction of the major axis of the orebody than dipwise. The slower decrease of the correlation function in the direction of the dip shows that in this direction the mutual connection of the Fe-content data is greater than in the direction of the major axis.

In the final part of the paper some correlation functions are shown which were found to be significant during the investigation of the distribution character of the considered parameters describing the orebody. The convergence of the correlation functions to constant c is explained by the deviation of the Fe-content distribution from the Gaussian one. The Fe content of 670 samples were tested for normality. The experimental distribution was approximated to a Gaussian one (Fig. 9, Tab. 4), and the appropriate coefficients and theoretical frequency data were calculated for the chosen intervals. Inequality (11) was used for the test of normality. It was found that the tested distribution was symmetrical but was leptocurtic. The application of the theory of random function was found to be of great value for the evaluation of the studied analytical data.

Preložil G. Timčák